

Analisis Varians = *Analysis of Variance* = ANOVA

1. Pendahuluan

1.1 Distribusi F

χ^2 → pengujian beberapa (>2) proporsi
ANOVA → pengujian beberapa (>2) nilai rata-rata

Dasar perhitungan ANOVA ditetapkan oleh Ronald A. Fisher.
Distribusi teoritis yang digunakan adalah Distribusi F.
Lihat Buku Statistika-2, GD hal. 180-182.

Nilai F tabel tergantung dari α dan derajat bebas
Nilai α = luas daerah penolakan H_0 = taraf nyata

Derajat bebas (db) dalam Dist F ada dua (2), yaitu :

1. db numerator = d_{fn} → db kelompok; db baris; db interaksi
2. db denominator = d_{fd} → db galat/error

Baca Tabel F anda!

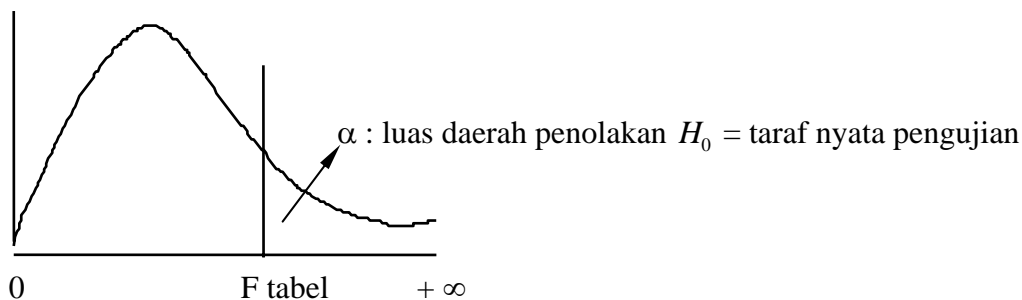
Nilai F untuk db numerator = 4; db denominator = 20 dan $\alpha = 5\%$? (2.87)

Nilai F untuk db numerator = 10; db denominator = 19 dan $\alpha = 2.5\%$? (2.82)

Nilai F untuk db numerator = 8; db denominator = 25 dan $\alpha = 1\%$? (3.32)

Pahami cara membaca Tabel hal 180-182 tsb!

Bentuk distribusi F → selalu bernilai positif
Perhatikan gambar berikut :



1.2 Penetapan H_0 dan H_1

H_0 : Semua perlakuan (kolom, baris, interaksi) memiliki rata-rata yang bernilai sama

H_1 : Ada perlakuan (kolom, baris, interaksi) yang memiliki rata-rata yang bernilai tidak sama (berbeda)

1.3 Tipe ANOVA

Pemilihan tipe ANOVA tergantung dari rancangan percobaan (experiment design) yang kita pilih .

a. ANOVA 1 arah:

Sampel dibagi menjadi beberapa kategori dan ulangan
 kolom = kategori
 baris = ulangan/replika

Contoh: Terdapat 4 Metode diet, dan 14 orang digunakan sebagai sampel

	Metode-1	Metode-2	Metode-3	Metode-4
member#1	Ali	Badu	Cici	Didi
member#2	Eno	Fifi	Gina	Hadi
member#3	Ina	Juli	Kiki	Lilo
member#4	-----	Mimi	-----	Nike

Metode-1 diulang 3 kali, Metode-2 diulang 4 kali,
 Metode-3 diulang 3 kali, Metode-4 diulang 4 kali.

Cat : Dalam banyak kasus untuk mempermudah perhitungan, ulangan untuk setiap kategori dibuat sama banyak

b. ANOVA 2 Arah tanpa interaksi:

Dalam kategori, terdapat blok/sub-kelompok
 kolom : kategori-1;
 baris : blok, kategori-2
 Setiap sel berisi satu data

Contoh : Terdapat 4 metode diet dan tiap metode dibagi menjadi 3 blok.
 Blok berupa kelompok umur.

metode kel. umur	Metode-1	Metode-2	Metode-3	Metode-4
< 20 tahun	✓	✓	✓	✓
20 - 40 tahun	✓	✓	✓	✓
>40 tahun	✓	✓	✓	✓

c. ANOVA 2 Arah dengan interaksi:

Dalam kategori, terdapat blok/sub-kelompok
 kolom : kategori-1
 baris : blok, kategori-2
 Setiap blok diulang, satu sel berisi beberapa data

Dengan pengulangan dalam tiap blok seperti ini, interaksi antara kolom dan baris dapat diketahui.

Contoh : Terdapat 4 metode diet dan tiap metode dibagi menjadi 3 blok, dan tiap blok diulang 3 kali

metode kel. umur	Metode-1	Metode-2	Metode-3	Metode-4
< 20 tahun,member#1	✓	✓	✓	✓
,member#2	✓	✓	✓	✓
,member#3	✓	✓	✓	✓
20-40 tahun,member#1	✓	✓	✓	✓
,member#2	✓	✓	✓	✓
,member#3	✓	✓	✓	✓
>40 tahun,member#1	✓	✓	✓	✓
,member#2	✓	✓	✓	✓
,member#3	✓	✓	✓	✓

1.4 Tabel ANOVA

Untuk memudahkan perhitungan ANOVA, kita dapat membuat tabel ANOVA, sebagai berikut:

Sumber Keragaman (SK)	Jumlah Kuadrat (JK)	derajat bebas (db)	Kuadrat Tengah (KT)	f hitung	f tabel

Cara pengambilan keputusan → bandingkan F hitung dengan F tabel.

F hitung ada di daerah penerimaan H_0 , maka H_0 diterima
atau Rata-rata tidak berbeda nyata

F hitung ada di daerah penolakan H_0 , maka H_0 ditolak, H_1 diterima
atau Rata-rata berbeda nyata

2. ANOVA 1 arah

Tabel ANOVA 1 Arah

Sumber Keragaman (SK)	Jumlah Kuadrat (JK)	derajat bebas (db)	Kuadrat Tengah (KT)	f hitung	f tabel
Rata-rata Kolom	JKK	db numerator = k-1	$s^2 K = KTK = \frac{JKK}{k-1}$	$f \text{ hitung} = \frac{KTK}{KTG}$	$\alpha =$ db numer = db denum = f tabel =
Galat	JKG	db denumerator = N-k	$s^2 G = KTG = \frac{JKG}{N-k}$		
Total	JKT	N-1			

$$JKT = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - \frac{T_{**}^2}{N}$$

$$JKK = \sum_{i=1}^k \frac{T_{*i}^2}{n_i} - \frac{T_{**}^2}{N}$$

$$JKG = JKT - JKK$$

di mana :

- k : banyaknya kolom
- N : banyaknya pengamatan/keseluruhan data
- n_i : banyaknya ulangan di kolom ke-i
- x_{ij} : data pada kolom ke-i ulangan ke-j
- T_{*i} : total (jumlah) ulangan pada kolom ke-i
- T_{**} : total (jumlah) seluruh pengamatan

Contoh 1:

Terdapat 4 metode diet, berikut adalah data 10 orang sampel yang didata rata-rata penurunan berat badan, setelah sebulan melakukan diet.

	Penurunan berat badan (Kg)				
	Metode-1	Metode-2	Metode-3	Metode-4	
member#1	4	8	7	6	
member#2	6	12	3	5	
member#3	4	-	-	5	
Total kolom	$T_{*1} = 14$	$T_{*2} = 20$	$T_{*3} = 10$	$T_{*4} = 16$	$T_{**} = 60$

Apakah keempat metode diet tersebut memberikan rata-rata penurunan berat badan yang sama?

Uji pendapat tersebut dengan taraf nyata 5 %

Solusi :

- H_0 : Setiap metode memberikan rata-rata penurunan berat badan yang sama

H_1 : Ada suatu metode yang memberikan rata-rata penurunan berat badan yang tidak sama
- Selesaikan Tabel ANOVA berikut :

Sumber Keragaman (SK)	Jumlah Kuadrat (JK)	derajat bebas (db)	Kuadrat Tengah (KT)	f hitung	f tabel
Rata-rata Kolom	JKK = 40.67	db numerato r k-1 = 4 - 1 = 3	KTK = $\frac{JKK}{k-1} = 13.55$	f hitung = $\frac{KTK}{KTG} = 4.21$ (tidak beda nyata)	$\alpha = 5\%$ db num=3 db denum = 6 f tabel = 4.76
Galat	JKG = 19.33	db denum = N-k= 10-4=6	KTG = $\frac{JKG}{N-k} = 3.22$		
Total	JKT = 60	N-1 = 10-1=9			

- Penyelesaian JKT, JKK dan JKG

$$JKT = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij}^2 - \frac{T^{**2}}{N}$$

$$JKT = (4^2 + 6^2 + 4^2 + 8^2 + 12^2 + 7^2 + 3^2 + 6^2 + 5^2 + 5^2) - \frac{60^2}{10} = 420 - 360 = 60$$

$$JKK = \sum_{i=1}^k \frac{T_i^{*2}}{n_i} - \frac{T^{**2}}{N}$$

$$JKK = \left(\frac{14^2}{3} + \frac{20^2}{2} + \frac{10^2}{2} + \frac{16^2}{3} \right) - \frac{60^2}{10} = (65.33... + 200 + 50 + 85.33...) - 360 = 40.67$$

$$JKG = JKT - JKK = 60 - 40.67 = 19.33...$$

$$KTK = \frac{JKK}{k-1} = \frac{40.67}{3} = 13.55$$

$$KTG = \frac{JKG}{N-k} = \frac{19.33}{6} = 3.22$$

4. Wilayah kritis : Penolakan H_0 jika F hitung > F tabel; F hitung > 4.76
 Penerimaan H_0 F hitung < F tabel; F hitung < 4.76

5. Kesimpulan :

Karena F hitung ada di daerah penerimaan (F hitung < F tabel) maka H_0 terima,
 Setiap metode memberikan rata-rata penurunan berat badan yang sama

3 ANOVA 2 Arah tanpa Interaksi

Pada rancangan percobaan dengan ANOVA jenis ini, setiap kategori mempunyai banyak blok yang sama, sehingga jika banyak kolom = k
 dan banyak baris/blok = r
 maka banyak data = N = r x k

Tabel ANOVA 2 Arah tanpa Interaksi

Sumber Keragaman (SK)	Jumlah Kuadrat (JK)	derajat bebas (db)	Kuadrat Tengah (KT)	f hitung	f tabel
Rata-rata Baris	JKB	db numer1 = r-1	$s^2B = KTB = \frac{JKB}{r-1}$	f hitung = $\frac{KTB}{KTG}$	$\alpha =$ db numer1= db denum = f tabel =
Rata-rata Kolom	JKK	db numer2 = k-1	$s^2K = KTK = \frac{JKK}{k-1}$	f hitung = $\frac{KTK}{KTG}$	$\alpha =$ db numer2= db denum = f tabel =
Galat	JKG	db denum = (r-1)(k-1)	$s^2G = KTG = \frac{JKG}{(r-1)(k-1)}$		
Total	JKT	r.k -1			

$$JKT = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^k x_{ij}^2 - \frac{T_{**}^2}{rk}$$

$$JKB = \sum_{i=1}^r \frac{T_{i*}^2}{k} - \frac{T_{**}^2}{rk}$$

$$JJK = \sum_{j=1}^k \frac{T_{*j}^2}{r} - \frac{T_{**}^2}{rk}$$

$$JKG = JKT - JKB - JJK$$

di mana : k : banyaknya kolom

r : banyaknya baris/blok

x_{ij} : data pada baris ke-i, kolom ke-j

T_{i*} : total (jumlah) baris ke-i

T_{*j} : total (jumlah) kolom ke-j

T_{**} : total (jumlah) seluruh pengamatan

Contoh 2: Terdapat 4 metode diet dan 3 golongan usia peserta program diet. Berikut data rata-rata penurunan berat peserta keempat metode dalam tiga kelompok umur.

	Metode-1	Metode-2	Metode-3	Metode-4	Total Baris
<20 thn	5	6	2	3	$T_{1*} = 16$
20 –40	2	7	5	3	$T_{2*} = 17$
>40 thn	7	3	4	3	$T_{3*} = 17$
Total Kolom	$T_{*1} = 14$	$T_{*2} = 16$	$T_{*3} = 11$	$T_{*4} = 9$	Total pengamatan $T_{**} = 50$

Ujilah pendapat yang menyatakan bahwa keempat metode diet dalam ketiga kelompok umur memberikan rata-rata penurunan berat badan yang sama.

Buktikan jawaban saudara dengan pengujian varians, dengan tingkat nyata = 1 %

Solusi :

- H_0 : Setiap metode pada setiap kelompok umur memberikan rata-rata penurunan berat badan yang sama

H_1 : Ada suatu metode pada suatu kelompok umur yang memberikan rata-rata penurunan berat badan yang tidak sama
- Selesaikan Tabel ANOVA berikut :

Tabel ANOVA

Sumber Keragaman (SK)	Jumlah Kuadrat (JK)	derajat bebas (db)	Kuadrat Tengah (KT)	f hitung	f tabel
Rata-rata Baris	JKB = 0.17	db numer1 = r-1 = 3-1=2	$s^2 B = KTB = \frac{JKB}{r-1} = 0.085$	f hitung = $\frac{KTB}{KTG} = 0.01974...$	$\alpha = 0.01$ db numer1=2 db denum = 6 f tabel = 10.92
Rata-rata Kolom	JKK = 9.67	db numer2 = k-1 = 4-1 =3	$s^2 K = KTK = \frac{JKK}{k-1} = 3.223$	f hitung = $\frac{KTK}{KTG} = 0.7456$	$\alpha = 0.01$ db numer2=3 db denum = 6 f tabel = 9.78
Galat	JKG = 25.83	db denumer = (r-1)(k-1) = 2.3 =6	$s^2 G = KTG = \frac{JKG}{(r-1)(k-1)} = 4.305$		
Total	JKT = 35.67	r.k -1 = 3x4-1=11			

3. Penyelesaian JKT, JKB, JKK dan JKG

$$JKT = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^k x_{ij}^2 - \frac{T_{**}^2}{rk} = (5^2 + 2^2 + 7^2 + 6^2 + 7^2 + 3^2 + 2^2 + 5^2 + 4^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2) - \frac{50^2}{12}$$

$$= 244 - 208.33 \dots = 35.67$$

$$JKB = \sum_{i=1}^r \frac{T_i^2}{k} - \frac{T_{**}^2}{rk} = \frac{(16^2 + 17^2 + 17^2)}{4} - \frac{50^2}{12} = \frac{834}{4} - \frac{2500}{12} = 208.5 - 208.33 = 0.17$$

$$JKK = \sum_{j=1}^k \frac{T_j^2}{r} - \frac{T_{**}^2}{rk} = \frac{(14^2 + 16^2 + 11^2 + 9)}{3} - \frac{50^2}{12} = \frac{654}{3} - \frac{2500}{12} = 218 - 208.33$$

$$= 9.67$$

$$JKG = JKT - JKB - JKK = 35.67 - 0.17 - 9.67 = 25.83$$

7. Kesimpulan

Menurut Baris dan Blok, nilai F hitung berada di daerah penerimaan H_0 .

Berarti : setiap metode pada setiap kelompok umur memberikan rata-rata penurunan berat badan yang sama

4. ANOVA 2 Arah dengan Interaksi

Efek interaksi diperoleh setelah setiap kolom [perlakuan] dan blok [baris] diulang. Interaksi dinyatakan sebagai perkalian Baris x Kolom [BK].

Tabel ANOVA 2 Arah dengan Interaksi

Sumber Keragaman (SK)	Jumlah Kuadrat (JK)	derajat bebas (db)	Kuadrat Tengah (KT)	f hitung	f tabel
Nilai tengah Baris	JKB	db numer1 = r-1	$s^2 B = KTB = \frac{JKB}{r-1}$	f hitung = $\frac{KTB}{KTG}$	$\alpha =$ db numer1= db denum = f tabel =
Nilai tengah Kolom	JKK	db numer2 = k-1	$s^2 K = KTK = \frac{JKK}{k-1}$	f hitung = $\frac{KTK}{KTG}$	$\alpha =$ db numer2= db denum = f tabel =
Interaksi [BK]	JK[BK]	db numer3 = [r-1][k-1]	$s^2 K = KT[BK] = \frac{JK[BK]}{[r-1][k-1]}$	f hitung = $\frac{KT[BK]}{KTG}$	$\alpha =$ db numer3= db denum = f tabel =
Galat	JKG	db denumer r.k.[n-1]	$s^2 G = KTG = \frac{JKG}{r.k.[n-1]}$		
Total	JKT	[r.k.n] -1			

$$JKT = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^k \sum_{m=1}^n x_{ijm}^2 - \frac{T_{***}^2}{rkn} \qquad JKB = \frac{\sum_{i=1}^r T_{i**}^2}{kn} - \frac{T_{***}^2}{rkn}$$

$$JKK = \frac{\sum_{j=1}^k T_{*j*}^2}{rn} - \frac{T_{***}^2}{rkn}$$

$$JK[BK] = \frac{\sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^k T_{ij*}^2}{n} - \frac{\sum_{i=1}^r T_{i**}^2}{kn} - \frac{\sum_{j=1}^k T_{*j*}^2}{rn} + \frac{T_{***}^2}{rkn}$$

$$JKG = JKT - JKB - JKK - JK[BK]$$

Perhatikan : Sebagian Notasi dalam JKT, JKB dan JKK digunakan dalam penghitungan JK[BK]

di mana :

r : banyak baris $i = 1,2,3,\dots,r$
 k : banyak kolom $j = 1,2,3,\dots,k$
 n : banyak ulangan $m = 1,2,3,\dots,n$

x_{ijm} : data pada baris ke-i, kolom ke-j dan ulangan ke-m

T_{i**} : Total baris ke-i

T_{*j*} : Total kolom ke-j

T_{ij*} : Total Sel di baris ke-i dan kolom ke-j

T_{***} : Total keseluruhan pengamatan

Contoh 3:

Terdapat 4 metode diet, 3 kelompok umur dan 3 ulangan. Berikut adalah data rata-rata penurunan berat badan setelah 1 bulan melakukan diet. Ujilah apakah penurunan berat badan sama untuk setiap metode diet, kelompok umur dan interaksi dengan taraf uji 5 % ?

metode \ kel. umur	metode 1	metode-2	metode-3	metode-4
< 20 tahun, #1	5	0	3	4
#2	4	2	4	2
#3	5	1	8	2
20-40 tahun, #1	5	4	2	5
#2	6	2	2	3
#3	2	1	4	2
>40 tahun, #1	4	5	2	6
#2	4	5	1	4
#3	5	0	2	4

$r = 3,$ $k = 4,$ $n = 3$

Solusi :

- H_0 : Semua perlakuan [metode diet, kelompok umur, interaksi] memberikan penurunan berat badan yang bernilai sama

H_1 : Ada suatu perlakuan [suatu metode diet, kelompok umur, interaksi] memberikan penurunan berat badan yang bernilai tidak sama
- $\alpha = 5 \%$
- Statistik Uji : F
- 4, 5, 6 : Selesaikan Tabel Data dan Tabel ANOVA

Contoh:

metode kel. umur	metode 1	metode-2	metode-3	metode-4	Total Baris
< 20 tahun, #1	5	0	3	4	T _{1**} = 40
#2	4	2	4	2	
#3	5	1	8	2	
	T _{11*} = 14	T _{12*} = 3	T _{13*} = 15	T _{14*} = 8	
20-40 tahun, #1	5	4	2	5	T _{2**} = 38
#2	6	2	2	3	
#3	2	1	4	2	
	T _{21*} = 13	T _{22*} = 7	T _{23*} = 8	T _{24*} = 10	
>40 tahun, #1	4	5	2	6	T _{3**} = 42
#2	4	5	1	4	
#3	5	0	2	4	
	T _{31*} = 13	T _{32*} = 10	T _{33*} = 5	T _{34*} = 14	
Total Kolom	T _{*1*} = 40	T _{*2*} = 20	T _{*3*} = 28	T _{*4*} = 32	TOTAL T _{***} = 120

$$JKT = [5^2 + 4^2 + 5^2 + 5^2 + \dots + 6^2 + 4^2 + 4^2] - \frac{120^2}{3 \times 4 \times 3} = 516 - 400 = 116$$

$$JKB = \frac{40^2 + 38^2 + 42^2}{4 \times 3} - \frac{120^2}{3 \times 4 \times 3} = 400.66\dots - 400 = 0.66\dots = 0.67$$

$$JKK = \frac{40^2 + 20^2 + 28^2 + 32^2}{3 \times 3} - \frac{120^2}{3 \times 4 \times 3} = 423.11\dots - 400 = 23.11\dots = 23.11$$

$$JK[BK] = \frac{14^2 + 13^2 + 13^2 + \dots + 10^2 + 14^2}{3} - \frac{40^2 + 38^2 + 42^2}{4 \times 3} - \frac{40^2 + 20^2 + 28^2 + 32^2}{3 \times 3} + \frac{120^2}{3 \times 4 \times 3} = 455.33\dots - 400.66\dots - 423.11\dots + 400 = 31.55\dots = 31.56$$

$$JKG = 116 - 0.66\dots - 23.11\dots - 31.56 = 60.66\dots = 60.67$$

Tabel ANOVA

Sumber Keragaman (SK)	Jumlah Kuadrat (JK)	derajat bebas (db)	Kuadrat Tengah (KT)	f hitung	f tabel
Nilai tengah Baris	JKB = 0.67	db numer1= r-1 = 3-1 = 2	$s^2 B = KTB = \frac{JKB}{r-1} = 0.34$	f hitung $= \frac{KTB}{KTG} =$ 0.13 ns	$\alpha = 5\%$ db numer1= 2 db denum = 24 f tabel = 3.40
Nilai tengah Kolom	JKK = 23.11	db numer2= k-1 = 4-1 = 3	$s^2 K = KTK = \frac{JKK}{k-1} = 7.70$	f hitung $= \frac{KTK}{KTG} =$ 3.04*	$\alpha = 5\%$ db numer2= 3 db denum = 24 f tabel = 3.01
Interaksi [BK]	JK[BK] = 31.56	db numer3= [r-1][k-1] = 2 x 3 = 6	$s^2 K = KT[BK] = \frac{JK[BK]}{[r-1][k-1]} = 5.26$	f hitung $= \frac{KT[BK]}{KTG}$ = 2.08 ns	$\alpha = 5\%$ db numer3= 6 db denum = 24 f tabel = 2.51
Galat	JKG = 60.67	db denumer r.k.[n-1]= 3 x 4 x 2 = 24	$s^2 G = KTG = \frac{JKG}{r.k.[n-1]} = 2.53$		
Total	JKT = 116	[r.k.n] -1= [3 x 4 x 3]-1 = 35			

7. Kesimpulan :

Perhitungan menunjukkan bahwa rata-rata penurunan berat badan pada Baris [Kel. Umur] dan Interaksi tidak berbeda [masih dianggap sama] sedangkan rata-rata penurunan berat badan dalam Kolom [metode diet] dapat dikatakan berbeda.

≡ selesai ≡