# Probabilitas = Peluang

(Bagian I)

## 1. Pendahuluan

- Percobaan : proses yang menghasilkan data
- Ruang Contoh (S) : himpunan yang memuat semua kemungkinan hasil percobaan

Misal :
a. Ruang contoh percobaan pelemparan sebuah mata uang ?
S : {head, tail} atau { gambar, angka}
b. Ruang contoh pelemparan dadu
S : {1, 2, 3, 4, 5, 6 }

- Kejadian = Event : himpunan bagian dari ruang contoh

Misal : Dari sekumpulan 52 kartu bridge S : { sekop, klaver, hati, wajik },
kita hanya tertarik pada ***kejadian*** A munculnya kartu yang berwarna merah.
A : {hati, wajik }

## 2. Pencacahan Titik Contoh

Sub bab ini adalah mengenai perhitungan banyaknya anggota ruang contoh.

### 2.1 Kaidah Penggandaan

Kaidah Penggandaan:
Jika operasi ke-1 dapat dilakukan dalam $n_1$ cara
operasi ke-2 dapat dilakukan dalam $n_2$ cara
:
:
operasi ke-k dapat dilakukan dalam $n_k$ cara

maka k operasi dalam urutan tersebut dapat dilakukan dalam $n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k$ cara

Contoh 1 :
Sebuah rumah makan akan membuat paket menu yang terdiri dari : sup, salad, steak dan es krim. Bila rumah makan tersebut mempunyai 4 jenis sup, 2 jenis salad, 5 jenis steak dan 3 jenis es krim. Berapa paket menu yang dapat dibuat?

Banyak paket menu = $4 \times 2 \times 5 \times 3 = 120$ paket menu

Contoh 2 :
Berapa banyak bilangan 4 digit yang dapat dibentuk dari angka 0, 2, 3 dan 5
a. jika semua angka boleh berulang?
$4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$

b. jika angka tidak boleh berulang?
$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$
(pada digit pertama, semua angka punya kemungkinan yang sama untuk ditempatkan, karena ada empat angka, maka ada 4 kemungkinan, selanjutnya pada digit kedua ada 3 kemungkinan karena angka yang sdh digunakan di digit pertama tidak boleh digunakan/muncul lagi, seterusnya pada digit ketiga tinggal 2 kemungkinan dan terakhir pada digit keempat hanya ada 1 kemungkinan)

c jika angka tidak boleh berulang dan merupakan kelipatan 2?
$3 \times 2 \times 1 \times 2 = 12$
(perhatikan pada digit terakhir hanya ada 2 kemungkinan yaitu angka 0 atau 2, sedangkan angka yang sudah muncul tidak boleh diulang, jadi pada digit pertama ada 3 kemungkinan, seterusnya pada digit kedua tinggal 2 kemungkinan dan pada digit ketiga tersisa 1 kemungkinan. Dengan demikian semua susunan yang mungkin adalah : 2350, 2530, 3250, 3520, 5230, 5320
0352, 0532, 3052, 3502, 5032, 5302
kesemuanya merupakan kelipatan 2.

d. dan banyak contoh soal lainnya.

## 2.2. Permutasi

Permutasi sejumlah obyek adalah penyusunan obyek tersebut dalam suatu urutan tertentu**.**

Dalam permutasi urutan diperhatikan!

Misal :
Dari huruf A, B, C $\rightarrow$ permutasi yang mungkin adalah: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB dan CBA. Perhatikan ke-enam susunan ini semua dianggap berbeda!

**Dalil-1 Permutasi** :
Banyaknya Permutasi n benda yang berbeda adalah n!

Konsep Bilangan Faktorial
$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times .... \times 2 \times 1$
$0! = 1$
$1! = 1$
$2! = 2 \times 1 = 2$
$3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$, dst
14! = 14 x 13 x 12 x 11 x 10 x 9 x 8 x 7 x 6 x 5 x 4 x 3 x 2 x 1
$100! = 100 \times 99!$
$100! = 100 \times 99 \times 98!$, dst

Contoh 3 :
Berapa cara menyusun bola lampu merah, biru, kuning dan hijau ?
Terdapat 4 objek berbeda : merah, kuning, biru dan hijau $\rightarrow$ $4! = 4\times 3 \times 2 \times 1 = 24$

**Dalil-2 Permutasi** :
Banyaknya permutasi r benda dari n benda yang berbeda adalah :

$${}_{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Perhatikan dalam contoh-contoh ini urutan obyek sangat diperhatikan!

Contoh 4 :
Dari 40 nomor rekening akan diundi 3 untuk memenangkan hadiah. Undian urutan pertama akan memperoleh uang tunai $1000, undian urutan kedua memperoleh paket wisata dan undian urutan ketiga memperoleh sebuah mobil murah meriah . Berapa banyaknya susunan pemenang yang mungkin terbentuk jika satu nomor rekening hanya berhak atas satu hadiah?
Diketahui dari soal tersebut : n = 40 dan r = 3

$${}_{40}P_{3} = \frac{40!}{(40-3)!} = \frac{40!}{37!} = \frac{40\times 39\times 38\times 37!}{37!} = 59280$$

**Dalil-3 Permutasi** :
Banyaknya permutasi n benda yang disusun dalam suatu lingkaran adalah (n-1)!

Contoh 5:
Enam orang bermain bridge dalam susunan melingkar. Berapa susunan yang mungkin dibentuk?
n = 6 maka permutasi melingkar = $(6-1)! = 5! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 120$

Sampai dalil ke-3, kita telah membahas permutasi untuk benda-benda yang berbeda. Perhatikan permutasi ABC, terdapat 3 objek yang jelas berbeda.

**Dalil-4 Permutasi** :

Banyaknya permutasi untuk sejumlah n benda

| | | | |
|---|---|---|---|
| di mana | jenis/kelompok | pertama | berjumlah $n_1$ |
| | jenis/kelompok | kedua | berjumlah $n_2$ |
| | : | | : |
| | : | | : |
| | jenis/kelompok | ke-k | berjumlah $n_k$ |

adalah : $\dfrac{n!}{n_1!n_2!n_3!\cdots n_k!}$

$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$

Contoh 6 :
Berapa permutasi dari kata STATISTIKA? S = 2; T = 3; A = 2; I = 2; K = 1

Permutasi $= \dfrac{10!}{2!3!2!2!1!} = 75600$

Contoh 7 :
Dari 7 orang mahasiswa akan dilakukan pemisahan kelas. 3 orang masuk ke kelas pertama, 2 orang masuk ke kelas kedua dan 2 orang masuk ke kelas ketiga.
Ada berapa cara pemisahan?
n = 7, n1=3, n2=2, n3 = 2 dimana n1+n2+n3 = n
jadi :

$$\frac{7!}{3!2!2!} = 210 \text{ cara pemisahan}$$

## 2.3 **<u>Kombinasi</u>**

Kombinasi r obyek yang dipilih dari n obyek adalah susunan r obyek <u>tanpa memperhatikan urutan.</u>

Misalkan : Kombinasi 2 dari 3 obyek A, B dan C adalah
1. A dan B = B dan A
2. A dan C = C dan A
3. B dan C = C dan B

| Dalil-1 Kombinasi |
|---|
| $$C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$ |

maka : Pemilihan 2 dari 3 obyek adalah : $C_2^3 = \dfrac{3!}{2!1!} = 3$

dimana n = 3 dan r = 2

## 2.4 **<u>Kaidah Penggandaan & Kombinasi</u>**

Dalam banyak soal penggandaan dan kombinasi seringkali digunakan bersama-sama.

Contoh 8 :
Manajer SDM mengajukan 10 calon manajer yang berkualifikasi sama, 5 calon berasal dari Kantor Pusat, 3 calon dari Kantor cabang dan 2 dari Program Pelatihan manajer. Berapa cara Manajer SDM dapat memilih 6 manajer baru dengan ketentuan 3 berasal dari Kantor Pusat. 2 dari Kantor Cabang dan 1 dari Program Pelatihan manajer?

Pemilihan 3 dari 5 calon dari Kantor Pusat $= C_3^5 = \frac{5!}{3!2!} = 10$

Pemilihan 2 dari 3 calon dari Kantor Cabang $= C_2^3 = \frac{3!}{2!1!} = 3$

Pemilihan 1 dari 2 calon dari Program Pelatihan $= C_1^2 = \frac{2!}{1!1!} = 2$

Pemilihan 6 Manajer baru dapat dilakukan dalam $= 10 \times 3 \times 2 = 60$ cara

## 3. <u>**Peluang Suatu Kejadian**</u>

- Peluang dalam pengertian awam $\rightarrow$ "kemungkinan"
  Misal : 1. Hari ini kemungkinan besar akan turun hujan
  2. Kemungkinan tahun depan inflasi akan mencapai dua digit
  3. dll.
- Peluang Kejadian dalam Statistika dinyatakan dalam <u>ratio</u> atau <u>perbandingan</u>

  Peluang kejadian A dinotasikan sebagai P(A)

  Peluang kejadian A adalah : jumlah peluang semua titik contoh yang menyusun kejadian A sehingga $\rightarrow$ $0 \le P(A) \le 1$
  di mana :
  $P(S) = 1$ $\rightarrow$ Peluang Kejadian yang pasti terjadi
  $P(\varnothing) = 0$ $\rightarrow$ Peluang Kejadian yang pasti tidak terjadi

<u>Contoh 1</u>.
Sekeping uang logam setimbang ( *balanced = tidak berat sebelah* ) dilempar 2 kali.
Berapa peluang Kejadian B yaitu munculnya sisi GAMBAR minimal satu kali pada pelemparan tersebut?

<u>Jawab</u> :
Karena mata uang yang dilempar adalah mata uang yang setimbang maka setiap titik contoh dalam S berpeluang sama, yaitu w = ¼ ( w : peluang tiap titik contoh ; 4w = 1; w = ¼)

Catatan : Jika 2 keping mata uang (setimbang) dilempar bersamaan, maka pasangan yang mungkin muncul adalah GG, GA, AG atau AA. Ini yang kemudian dinyatakan sebagai ruang contoh S untuk setiap kemungkinan pasangan yang muncul. Karena ada 4 kemungkinan pasangan yang akan muncul, berarti peluang setiap pasangan untuk muncul adalah ¼.

S = {GG, GA, AG, AA} G = GAMBAR dan A = ANGKA

$$\begin{array}{cccc} GG & GA & AG & AA \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ w & w & w & w \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array} \quad \rightarrow P(S) = 4w \rightarrow \quad 1 = 4w \quad \rightarrow w = \frac{1}{4}$$

B = kejadian munculnya minimal 1 sisi GAMBAR pada 2 kali pelemparan koin mata uang
Titik contoh yang menyusun kejadian B adalah { GG, GA. AG}
sehingga P(B) = ¼ + ¼ +¼ = ¾

Contoh 2 :
Suatu dadu diberi pemberat sedemikian rupa sehingga munculnya angka-angka genap berpeluang 2 kali dibanding angka-angka ganjil. Kemudian diketahui, E adalah kejadian munculnya sisi dadu bernilai kurang dari 4. Hitung P(E)!

Ruang contohnya adalah setiap sisi mata dadu yang muncul, berarti :

$$\begin{array}{cccccc} S = \{1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6\} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ w & 2w & w & 2w & w & 2w \\ \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \end{array} \rightarrow P(S) = 1 \rightarrow 1 = 9\,w \rightarrow w = \frac{1}{9}$$

E = {1, 2, 3 }

$$P(E) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$$

**Dalil 1 Peluang Kejadian**

| |
|---|
| Jika setiap titik contoh mempunyai peluang yang sama maka : $P(A) = \frac{n}{N}$ |

n : banyak titik contoh penyusun Kejadian A
N : banyak titik contoh dalam Ruang Contoh (S)

Contoh 3 :
Berapa peluang memperoleh kartu berwarna As hitam (♣ dan ♠) bila sebuah kartu diambil secara acak dari seperangkat kartu bridge?
n = banyak kartu As hitam = 2 dan N = 52

$$P(\text{AS HITAM}) = \frac{2}{52} = \frac{1}{26}$$

Contoh 4 :
Terdapat 10 kandidat karyawan yang terdiri dari 6 Sarjana Ekonomi dan 4 Sarjana Teknik.
Berapa peluang terpilih 3 orang yang terdiri dari 2 Sarjana Ekonomi dan 1 Sarjana Teknik?
Semua kandidat berpeluang sama!

Pemilihan 2 dari 6 Sarjana Ekonomi = $C_2^6 = \frac{6!}{4!2!} = 15$

Pemilihan 1 dari 4 Sarjana teknik = $C_1^4 = \frac{4!}{3!1!} = 4$

n = Pemilihan 2 Sarjana Ekonomi dan 1 Sarjana Teknik = 15 x 4 = 60

N = Pemilihan 3 dari 10 kandidat karyawan = $C_3^{10} = \frac{10!}{3!7!} = 120$

P(2SE dan 1 ST) = $^{60}\!/_{120}$ = 0.5

Catatan : SE = Sarjana Ekonomi dan ST = Sarjana Teknik

- Bagaimana jika peluang setiap titik berpeluang tidak sama?
  Misalnya : Mata uang tidak setimbang
  Dadu yang diberi pemberat
  Pengaruh warna/aroma produk pada preferensi pembeli?

Peluang untuk hal-hal tersebut dapat dilakukan dengan metode :

a) Subjektif → berdasarkan pengalaman, informasi tidak langsung, intuisi, perasaan

b) Frekuensi Kumulatif → melakukan percobaan berulang kali
Mis. : Pelemparan mata uang sebanyak 100 kali? 1000 kali?
Lalu catat berapa banyak sisi GAMBAR muncul!

## 4. **Kaidah Penjumlahan Peluang Kejadian**

***Dalil 1. Kaidah Penjumlahan Peluang Kejadian***

| Bila A dan B adalah dua kejadian sembarang, maka<br>$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$<br>atau<br>$P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B)$ |
|---|

$A\cup B$ = kejadian A **atau** B
$A\cap B$ = kejadian A **dan** B

Contoh 5 :
Menurut catatan sebuah Bank, peluang Industri Manufakturing memperoleh kredit adalah 0.35. Sedangkan peluang Industri yang Padat Karya = 0.45. Peluang Industri yang tergolong Manufakturing atau Padat Karya = 0.25. Berapakah Peluang Industri Manufakturing dan Padat Karya memperoleh Kredit?
P (A) = 0.35 P(B) = 0.45 $P(A\cup B)$ = 0.25
Maka $P(A\cap B) = P(A) + P(B) - P(A\cup B)$
= 0.35 + 0.45 - 0.25
= 0.5

| Konsekuensi 1. Kaidah Penjumlahan Peluang<br><br>Bila A dan B adalah kejadian Saling Terpisah ($A\cap B=\varnothing$), maka :$P(A\cup B) = P(A) + P(B)$ |
|---|

Contoh 6 :
Berapakah peluang munculnya kartu bernilai 7 berwarna merah (A) atau bernilai 7 dengan warna hitam(B) pada pengambilan sebuah kartu secara acak dari seperangkat kartu bridge?

Pada pengambilan sebuah kartu tidaklah mungkin mendapatkan kartu bernilai 7 berwarna merah sekaligus berwarna hitam ($A \cap B = \emptyset$)
$P(A) = 2/52$ $P(B) = 2/52$ $P(A \cap B) = \emptyset$
Maka : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$P(A \cup B) = 2/52 + 2/52 = 4/52 = 1/13$$

| |
|---|
| Konsekuensi 2. Kaidah Penjumlahan Peluang<br><br>Bila $A_1, A_2, \ldots, A_k$ saling terpisah, maka :<br>$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_k)$ |

***Dalil 2. Kaidah Penjumlahan Peluang***

| |
|---|
| Jika A dan A' adalah 2 kejadian yang berkomplemen, maka :<br>$P(A) + P(A') = 1$ |

Contoh 7 :
Sekeping mata uang setimbang dilemparkan 6 kali. Berapa peluang sisi GAMBAR muncul minimal 1 kali P(A)?
S {GGGGGG, GGGGGA,GGGGAA ..., AAAAAA} dimana G= Gambar A = Angka banyak anggota S = $2^6$ = 64 (Anda Percaya?)

A = kejadian munculnya GAMBAR minimal 1 kali pada pelemparan 6 kali
A' = kejadian munculnya GAMBAR = 0 pada pelemparan 6 kali = {AAAAAA}
$P(A') = 1/64$
$P(A) + P(A') = 1$
$P(A) = 1 - P(A') = 1 - 1/64 = 63/64$

## 5. Peluang Bersyarat

Peluang Bersyarat berlaku untuk penetapan peluang kejadian yang tidak bebas.

Kejadian-kejadian yang bergantung dengan kejadian lain disebut : ***Kejadian Tidak Bebas***.
Contoh kejadian tidak bebas : pengambilan contoh tanpa pemulihan
Tanpa pemulihan = contoh yang telah terambil tidak dikembalikan ke dalam ruang contoh.

Kejadian yang terjadi tanpa bergantung dengan kejadian lain disebut Kejadian ***Bebas***.
Contoh kejadian bebas : pengambilan contoh dengan pemulihan
Dengan pemulihan = contoh yang telah terambil dikembalikan ke dalam ruang contoh.

Notasi Peluang Bersyarat :

$\boxed{P(B|A)}$

Dibaca : "Peluang terjadinya B, bila A telah terjadi"
atau
"Peluang B, jika peluang A diketahui"

Contoh 8:
Terdapat 10 bola terdiri dari 4 bola merah dan 6 bola hitam. Pengambilan sebuah bola dilakukan tanpa pemulihan

Peluang Bola pertama berwarna Merah= P(MERAH) = $4/10$

Peluang Bola kedua berwarna Hitam = P (HITAM | MERAH) = $6/9$
(karena 1 bola merah sudah diambil sisa bola 9, yaitu 3 merah dan 6 hitam)

Peluang Bola ketiga berwarna Hitam = P (HITAM | HITAM | MERAH) = $5/8$
(karena 1 bola merah dan 1 bola hitam sudah diambil, sisa bola 8, yaitu 3merah dan 5 hitam )

Peluang Bola keempat berwarna Merah = P(MERAH | HITAM | HITAM | MERAH) = $3/7$
(karena 1 bola merah dan 2 bola hitam sudah diambil, sisa bola 7, yaitu 3 merah dan 3 hitam )

***Definisi Peluang Bersyarat secara umum*** :

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A) \neq 0$$

Perhatikan : $P(B|A) \neq P(A|B)$
$P(A \cap B) = P(B \cap A)$

Contoh 9 : Peluang KRL berangkat tepat waktuP(B) = 0.50
Peluang KRL datang ke tepat waktu P(D) = 0.40
Peluang KRL berangkat dan datang tepat waktu P(B∩D) = 0.30

a. Peluang KRL akan datang tepat waktu setelah berangkat tepat waktu?

$$P(D|B) = \frac{P(B \cap D)}{P(B)} = \frac{0.3}{0.5} = 0.6$$

b. Peluang KRL akan berangkat tepat waktu setelah datang tepat waktu?

$$P(B|D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$$

Definisi : Dua Kejadian A dan B dikatakan ***bebas*** jika :

$P(B|A) = P(B)$ atau $P(A|B) = P(A)$

Bila hal itu ***tidak dipenuhi,*** A dan B dikatakan ***tidak bebas***

## 6. Kaidah Penggandaan Peluang

Penghitungan peluang beberapa kejadian yang dapat terjadi sekaligus.

***Dalil 1. Kaidah Penggandaan Peluang***

Bila dalam suatu percobaan kejadian A dan B dapat terjadi **sekaligus**, maka :

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \times P(B|A) \\ &= P(B \cap A) \\ &= P(B) \times P(A|B) \end{aligned}$$

Ingat : $A \cap B$ dibaca sebagai kejadian A **dan** B

Contoh 10 (Lihat Contoh 8)
Terdapat 10 bola terdiri dari 4 bola merah dan 6 bola hitam. Pengambilan sebuah bola dilakukan tanpa pemulihan

a) Peluang Bola pertama berwarna Merah= P(MERAH) = $4/10$
atau sebut saja P(A)=4/10
Peluang Bola kedua berwarna Hitam = P (HITAM | MERAH) = $6/9$
atau sebut saja P(B|A) = 6/9
Peluang Bola pertama Merah dan Bola kedua Hitam = $4/10 \times 6/9 = 24/90 = 4/15$
berarti $P(A \cap B) = P(A) \times P(B|A)$

b) Peluang Bola pertama berwarna Hitam = P(HITAM) = $6/10$
atau sebut saja P(B)=6/10

Peluang Bola kedua berwarna Merah = P(MERAH | HITAM) = $4/9$
atau sebut saja P(A|B) = 4/9

Peluang Bola pertama Hitam dan Bola kedua Merah = $6/10 \times 4/9 = 24/90 = 4/15$
berarti $P(B \cap A) = P(B) \times P(A|B)$

Dalil 1 di atas , TERBUKTI KAN…..

### *Dalil 2. Kaidah Penggandaan Peluang Kejadian Bebas*

Bila A dan B adalah kejadian bebas, maka :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

<u>Contoh 10b</u>:
Terdapat 10 bola terdiri dari 4 bola merah dan 6 bola hitam. Pengambilan sebuah bola dilakukan dengan pemulihan

Peluang Bola pertama berwarna Merah= P(MERAH) = $4/10$

Peluang Bola kedua berwarna Hitam = P (HITAM | MERAH) = P(HITAM) $6/10$

Peluang Bola pertama Merah dan Bola kedua Hitam = $4/10 \times 6/10 = 24/100 = 6/25$

### *Kaidah Penggandaan Peluang (secara umum)*

Dalil 3. Kaidah Penggandaan Peluang (secara umum)

Bila dalam suatu percobaan kejadian $A_1, A_2, \ldots, A_k$, maka :
$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_k) = P(A\ ) \times P(A_2 | A_1) \times P(A_3 | A_1 \cap A_2) \times \ldots \times$
$P(A_k | A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{k-1})$

☺ Selesai ☺